FOURIER Oktober 2012, Vol. 1, No. 2, 132 – 141

Aplikasi Aljabar Geometris Pada Teori Elektrodinamika Klasik

Joko Purwanto[1]

[1]*Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Jl. Marsda Adisucipto No. 1 Yogyakarta 55281*

jkp_wanto@yahoo.com

Abstract

In this paper geometric algebra and its aplication in the theory of classical electrodynamic will be studied. Geometric algebra provide many simplification and new insight in the theoretical formulation and physical aplication of theory. In this work has been studied aplication of geometric algebra in classical electrodynamics especially Maxwell's equations. Maxwell's equations was formulated in one compact equation $\nabla F = J$*. The various equation parts are easily identified by their grades.*

Key words: *geometric algebra, classical electrodynamic, Maxwell's equation.*

1. Pendahuluan

Fenomena-fenomena fisis merupakan tanda-tanda (ayat kauniayah) kekuasaan Allah SWT yang dikenal dengan hukum alam atau sunatullah, sebagaimana diisyaratkan dalam QS Ali 'Imron ayat 190 yang artinya :

Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal.

Jika manusia mampu memahami hukum alam, maka ia akan mengetahui bagaimana alam akan memberikan respon dan bereaksi terhadap tindakan yang dilakukan terhadapnya. Dengan demikian, manusia dapat merekayasa kondisi tertentu sedemikian sehingga alam akan memberikan respon yang menguntungkan bagi kehidupan manusia [1]. Dalam mengkaji hukum alam tersebut teoriwan mengajukan berbagai model hukum alam berdasarkan data-data empiris pengamatan maupun telaah teoritik. Sejauh ini dikenal tiga macam pemodelan hukum alam, yakni model matematis, model fenomenologis dan model metafisis. Model matematis dipandang lebih operasional sehingga lebih banyak digunakan daripada model yang lain.

Penggunaan aljabar geometris untuk memodelkan hukum alam memberikan keuntungan dan kemudahan dalam mendeskripsikan fenomena-fenomena fisika [2]. Konsep aljabar geometris dikenalkan oleh Hermann Grassmann pada tahun 1809 dalam bukunya *The Linier Extension Theory, A New Branch of Mathematics*. Penerapan aljabar geometris pada ranah fisika dan teknik diawali oleh buku *Space-Time Algebra* yang ditulis oleh David Hestenes tahun 1966 dan *Clifford Algebra to Geometric Calculus* pada tahun 1984. David Hestenes menyajikan aljabar geometris pada wilayah terapan yang lebih luas dengan mengenalkan konsep aljabar ruang waktu dan kalkulus geometris [3][4]. Dalam makalah ini dibahas pemodelan konsep-konsep elektrodinamika klasik dengan aljabar geometris. Aplikasi aljabar geometris pada konsep elektrodinamika klasik memungkinkan unifikasi keempat persamaan Maxwell dalam satu persamaan tuggal yang kompak [5].

2. Aljabar Geometris

2.1 Definisi dan Aksioma

Aljabar geometris dibangun pada ruang vektor linier berproduk skalar yang dibekali dengan hasilkali geometris (*geometric product*).

Definisi 2.1 *Hasilkali geometris antara vektor u dan vektor v adalah*

$$uv = u \cdot v + u \wedge v \tag{1}$$

dengan $u \cdot v$ *adalah hasilkali dalam (inner product) dan* $u \wedge v$ *hasilkali luar (outer product atau wedge product).*

Definisi 2.2 *Himpunan* $\mathcal{G}$ *yang dibekali dengan hasilkali geometris disebut Aljabar Geometris.*

Ruas kanan persamaan (2) merupakan jumlahan dari dua ‘makhluk’ yang berbeda, yakni skalar dan bivektor. Penjumlahan tersebut sangat mungkin dilakukan karena dalam aljabar geometris orang memperluas konsep ruang yang selama ini dipahami dengan menambahkan ‘*bilik skalar*’, ‘*bilik vektor*’, ‘*bilik bivektor*’, ‘*bilik trivektor*’,..., ‘*bilik multivektor*’, dan ‘*bilik pseudo skalar*’ [5].

Aksioma 2.1 $\mathcal{G}$ *adalah ring yang memiliki identitas (satuan). Identitas terhadap operasi penjumlahan disebut 0 dan identitas terhadap operasi perkalian adalah 1.*

Berdasarkan aksioma 2.1 dapat dikatakan bahwa (a) operasi penjumlahan dan perkalian dalam $\mathcal{G}$ bersifat asosiatif, (b) setiap elemen dalam $\mathcal{G}$ memiliki invers (c) operasi penjumlahan bersifat komutatif dan (d) distributif baik dari kiri maupun dari kanan. Elemen-elemen $\mathcal{G}$ dinamakan multivektor.

Aksioma 2.2 *$\mathcal{G}$ memuat $\mathcal{G}_0$ yakni unsur 0 dan 1.*

Elemen $\lambda \in \mathcal{G}_0$ disebut vektor-0 atau multivektor homogen berderajad 0 disebut pula skalar. Himpunan $\mathcal{G}_0$ bersifat tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian serta memuat invers semua elemen $\mathcal{G}$.

Teorema 2.1 *Hasilkali geometris memenuhi sifat-sifat berikut*

1. *Assosiatif,* $u(vw) = (uv)w = uvw$.
2. *Distributif terhadap operasi penjumlahan* $u(v+w) = uv + uv$.
3. *Kontraksi,* $v^2 = |v|^2$
4. *Antikomutatif,* $uv = -vu$ *jika u dan v saling tegak lurus (* $u \cdot v = 0$ *).*
5. *Komutatif,* $uv = vu$ *jika u dan v sejajar* $(u \wedge v = 0)$.

Aksioma 2.3 *$\mathcal{G}$ mengandung subhimpunan $\mathcal{G}_r$ yang tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian dengan skalar sehingga untuk setiap $\lambda \in \mathcal{G}_0$ dan $v \in \mathcal{G}_r$ berlaku $\lambda v = v\lambda \in \mathcal{G}_r$.*

Elemen $\mathcal{G}_r$ disebut vektor-*r* (*r-blade*) atau multivektor homogen berderajad *r*. Untuk $r = 1$ disebut vektor-1 (1-*blade*) atau vektor. Untuk $r = 2$ disebut bivektor (2-*blade*), dan seterusnya. Elemen berderajat tertinggi dalam $\mathcal{G}_r$ dinamakan pseudoskalar (*I*). Pseudoskalar mempunyai dua sifat penting: (1) $I^2 = -1$ yang menunjukkan bahwa *I* setara dengan *i* pada bilangan kompleks, (2) *I* dibentuk dari vektor basis putar kanan [5].

Definisi 2.3 *Operator grade adalah pemetaan $\langle\ \rangle_r : \mathcal{G} \to \mathcal{G}_r$ yang memproyeksikan setiap $A \in \mathcal{G}$ terhadap elemen $\mathcal{G}_r$ secara tunggal sedemikian sehingga*

1. *A adalah vektor-r jika* $A = \langle A \rangle_r$
2. $\langle A + B \rangle_r = \langle A \rangle_r + \langle B \rangle_r$
3. $\langle \lambda A \rangle_r = \langle A\lambda \rangle_r = \lambda \langle A \rangle_r$
4. $\langle \langle A \rangle_r \rangle_s = \langle A \rangle_r \delta_{rs}$
5. $\langle A \rangle_r = 0$ *jika* $r < 0$ *untuk setiap* $A \in \mathcal{G}$

Aksioma 2.4 *Kombinasi linier beberapa blade yang berbeda akan membentuk multivektor*

$$A = \langle A \rangle_0 + \langle A \rangle_1 + \langle A \rangle_2 + \ldots + \langle A \rangle_k \tag{2}$$

dengan $\langle A \rangle_0$ *skalar,* $\langle A \rangle_1$ *vektor,* $\langle A \rangle_2$ *bivektor, dan* $\langle A \rangle_k$ *r-vektor.*

2.2 Aljabar Geometris Bidang ($\mathcal{G}_2$)

Tinjau himpunan yang beranggotakan dua buah vektor satuan ortonormal putar kanan $\{e_1, e_2\}$. Dari himpunan ini dapat dibangun basis aljabar geometris ruang dua dimensi ($\mathcal{G}_2$) yakni,

$$\{1, e_1, e_2, e_1 \wedge e_2\}. \tag{3}$$

Sembarang multivektor A dan B anggota $\mathcal{G}_2$ dapat dituliskan

$$A = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 (e_1 \wedge e_2) \tag{4}$$

dengan a_0, a_1, a_2, a_3 konstanta dan

$$B = b_0 + b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 (e_1 \wedge e_2) \tag{5}$$

dengan b_0, b_1, b_2, b_3 konstanta. Hasilkali geometris antara multivektor A dan B adalah

$$AB = p_0 + p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 (e_1 \wedge e_2), \tag{6}$$

dengan

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3 \\ p_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_3 b_2 - a_2 b_3 \\ p_2 &= a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_1 b_3 - a_3 b_1 \\ p_3 &= a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{aligned}. \tag{7}$$

Hasilkali geometris dua multivektor pada ruang berdimensi dua merupakan kombinasi linier dari basis $\{1, e_1, e_2, I\}$. Hasilkali geometris ini menghasilkan multivektor baru $AB \in \mathcal{G}_2$. Secara sederhana konsep aljabar geometris dalam ruang dua dimensi ini dapat diperluas untuk ruang berdimensi *n* sembarang $\mathcal{G}_n$ [5].

3. Aljabar Geometris Ruang Waktu $\left(\mathcal{G}\left(\mathcal{M}^4\right)\right)$

3.1 Pemisahan Ruang Waktu (*Spacetime Split*)

Aljabar geometris ruang waktu dilambangkan $\mathcal{G}\left(\mathcal{M}^4\right) = \mathcal{G}(1,3)$ dengan $\mathcal{M}^4$ adalah ruang waktu Minkowski berdimensi empat. Konsep penyatuan ruang dan waktu menjadi satu entitas ruang waktu dilandasi oleh asas-asas teori relativitas khusus (TRK) Einstein. Menurut

TRK, kuadrat vektor dapat bernilai positif, nol, atau negatif. Vektor x dikatakan vektor bak waktu (*timelike*) jika $x^2 > 0$, bak cahaya (*lightlike*) jika $x^2 = 0$, dan bak ruang (*spacelike*) jika $x^2 < 0$. Interval ruangwaktu s dituliskan

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{8}$$

dengan t adalah parameter waktu dan x, y, z parameter ruang menurut kerangka acuan inersia. Aljabar ruangwaktu dibangun oleh himpunan basis vektor ortogonal $\{\gamma_\mu\}, \mu = 0,1,2,3$ yang memenuhi kaitan

$$\gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = \eta_{\mu\nu} = diag(+---) \tag{9}$$

dengan

$$\gamma_0^2 = 1, \quad \gamma_0 \cdot \gamma_i = 0, \quad \gamma_i \cdot \gamma_j = -\delta_{ij}. \tag{10}$$

Dalam aljabar ruangwaktu terdapat satu vektor arah bak waktu dan tiga vektor arah bak ruang. Empat vektor ortogonal tersebut membangkitkan ruang linier 16 dimensi melalui

$$\{1, \gamma_\mu, \sigma_k, I\sigma_k, I\gamma_\mu, I\} \tag{11}$$

dengan $I = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ dan $\boldsymbol{\sigma}_k = \gamma_k\gamma_0, k = 1,2,3$ adalah bivektor ruangwaktu. Aljabar geometris ruangwaktu memiliki enam buah bivektor yang terbagi dalam dua komponen, yaitu tiga komponen bak waktu $\gamma_i \wedge \gamma_0$ dan tiga komponen bak ruang $\gamma_i \wedge \gamma_j$.

Tinjau pengamat inersia yang rehat atau bergerak dengan kecepatan konstan $v, v^2 = 1$, yang menyusuri lintasan bak waktu. Vektor kecepatan pengamat dipilih $v = \gamma_0$ vektor bak waktu dengan γ_0 tegak lurus terhadap $\{\gamma_i\}$. Jika x adalah vektor empat ruangwaktu yang menunjukkan posisi atau peristiwa (*event*) suatu partikel, maka koordinat ruangwaktu peristiwa x menurut kerangka γ_0 adalah

$$x = t\gamma_0 + x^i\gamma_i \tag{12}$$

dengan koordinat waktu

$$t = x \cdot \gamma_0 = x \cdot v \tag{13}$$

dan koordinat ruang

$$x^i = x \cdot \gamma_i. \tag{14}$$

Apabila peristiwa yang ditinjau rehat dalam kerangka $\{\gamma_0\}$ maka vektor tiga dimensional peristiwa tersebut adalah

$$x^i\gamma_i = x\cdot\gamma^\mu\gamma_\nu - x\cdot\gamma^0\gamma_0 = x - x\cdot vv = x\wedge vv. \tag{15}$$

Besaran $x\wedge v$ adalah bivektor ruangwaktu atau vektor relatif

$$\boldsymbol{x} = x\wedge v \tag{16}$$

Dari definisi di atas diperoleh pemisahan ruangwaktu (*spacetime split*) peristiwa x menurut pengamat inersia menjadi dua bagian, yakni parameter waktu dan parameter ruang,

$$xv = x\cdot v + x\wedge v = t + \boldsymbol{x} \tag{17}$$

Satu hal yang istimewa dari pemisahan ruangwaktu, ia dapat menjelaskan invariansi Lorentz tanpa harus meninjau transformasi Lorentz terlebih dahulu [2]. Pemisahan enam buah bivektor ruangwaktu menjadi vektor-vektor relatif merupakan operasi yang gayut pada pengamat γ_0. Vektor pengamat dengan kecepatan yang berbeda akan mendapatkan pemisahan ruangwaktu yang berbeda pula.

3.2 Turunan Vektor Ruang Waktu

Operator turunan vektor ruangwaktu didefinisikan [5]

$$\nabla = \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + \gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{18}$$

Persamaan (19) apabila dikalikan dengan γ_0 dari kanan diperoleh

$$\nabla\gamma_0 = \partial_t + \gamma^i\gamma_0 \frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_t - \boldsymbol{\nabla}, \tag{19}$$

dengan $\boldsymbol{\nabla} = \sigma_i\partial_i = \sigma_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ adalah operator turunan vektor dalam ruang linier menurut kerangka acuan γ_0. Dengan cara serupa diperoleh, persamaan (19) manakala dikalikan dengan γ_0 dari kiri diperoleh

$$\gamma_0\nabla = \partial_t + \boldsymbol{\nabla}. \tag{20}$$

Dari persamaan (20) dan (21) diperoleh operator turunan kedua vektor ruangwaktu

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2. \tag{21}$$

Tampak bahwa operator Laplasian di atas merupakan operator yang mendeskripsikan persamaan gelombang untuk partikel yang bergerak dengan kecepatan cahaya.

4. Aplikasi Aljabar Geometris Pada Teori Elektrodinamika Klasik

Pada bagian ini akan dibahas aplikasi aljabar geometris pada teori elektrodinamika klasik, yakni pada pemodelan persamaan-persamaan Maxwell dan potensial vektor.

4.1 Persamaan Maxwell

Persamaan Maxwell elektrodinamika klasik dalam ruang vakum diberikan oleh [6]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \end{aligned} \tag{22}$$

dengan $\mathbf{E}$ medan listrik, $\mathbf{B}$ medan magnetik, $\mathbf{J}$ rapat arus listrik dan ρ rapat muatan. Dengan menggunakan alih ragam dualitas [3]

$$\nabla \times \mathbf{J} = -I\nabla \wedge \mathbf{J} \tag{23}$$

dan operator turunan vektor ruangwaktu persamaan (20) maka persamaan-persamaan Maxwell (22) dapat dituliskan

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{E} &= -\partial_t (I\mathbf{B}) \\ \nabla \wedge \mathbf{B} &= I(\mathbf{J} + \partial_t \mathbf{E}) \end{aligned} \tag{24}$$

Tampak dari persamaan-persamaan di atas persamaan Maxwell dapat disajikan dalam operator divergensi dan operator rotasi turunan vektor. Persamaan (26) merupakan model awal untuk memadukan keempat persamaan Maxwell.

Dua persamaan Maxwell yang melibatkan medan listrik $\mathbf{E}$ dapat dipadukan menjadi

$$\nabla \mathbf{E} = \rho - \partial_t (I\mathbf{B}). \tag{25}$$

Sedangkan dua persamaan Maxwell untuk medan magnet $\mathbf{B}$ dapat ditulis kembali menjadi

$$\nabla \mathbf{B} = I(\mathbf{J} + \partial_t \mathbf{E}) \tag{26}$$

Jika kedua ruas persamaan (28) dikalikan dengan pseudoskalar I, diperoleh

$$\nabla (I\mathbf{B}) = -\mathbf{J} - \partial_t \mathbf{E}. \tag{27}$$

Persamaan (27) mengandung bagian skalar dan vektor sementara persamaan (29) mengandung elemen bivektor dan pseudoskalar. Oleh karena itu, kedua persamaan tersebut dapat dipadukan dalam satu persamaan multivektor

$$\nabla (\mathbf{E} + I\mathbf{B}) + \partial_t (\mathbf{E} + I\mathbf{B}) = \rho - \mathbf{J}. \tag{28}$$

Perpaduan di atas tidak menyebabkan lenyapnya sebagian atau seluruh informasi-nformasi terkait persamaan Maxwell karena persamaan-persamaan Maxwell dapat diperoleh kembali melalui *operasi grade*, yakni dengan mengambil persamaan multivektor (28) menurut derajat masing-masing.

Selanjutnya, definisikan bivektor Faraday menurut [2],

$$F = \mathbf{E} + I\mathbf{B} . \tag{29}$$

Persamaan (29) merepresentasikan kuat medan elektromagnetik. Kombinasi vektor relatif $\mathbf{E}$ dan bivektor $I\mathbf{B}$ menunjukkan bahwa besaran F merupakan bivektor ruang waktu. Subtitusi persamaan (29) kedalam persamaan (28) diperoleh

$$\nabla F + \partial_t F = \rho - \mathbf{J} . \tag{30}$$

Mudah ditunjukkan bahwa persamaan (30) memenuhi kovariansi Lorentz. Definisikan arus ruangwaktu J, menurut

$$\rho = J \cdot \gamma_0 \tag{31}$$

dan

$$\mathbf{J} = J \wedge \gamma_0 \tag{32}$$

sehingga diperoleh persamaan

$$\rho - \mathbf{J} = J \cdot \gamma_0 + J \wedge \gamma_0 = \gamma_0 J . \tag{33}$$

Namun, karena $\partial_t + \nabla = \gamma_0 \nabla$ maka persamaan (33) dapat dikalikan dengan γ_0 dari kiri untuk memperoleh bentuk kovarian

$$\nabla F = J \tag{34}$$

Persamaan (34) memadukan keempat persamaan Maxwell menjadi satu persamaan tunggal dalam sajian aljabar geometris. Hasil ini merupakan salah satu pencapaian luar biasa yang dapat dilakukan dengan aljabar geometris meskipun makna fisis dari persamaan di atas masih memerlukan kajian lebih mendalam.

Jika persamaan (34) dikalikan dengan ∇ didapat

$$\nabla^2 F = \nabla J = \nabla \cdot J + \nabla \wedge J \tag{35}$$

Mengingat bahwa ∇^2 adalah operator skalar, maka arus ruangwaktu J memenuhi persamaan kontinuitas

$$\nabla \cdot J = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \tag{36}$$

Persamaan ini menunjukkan bahwa jumlah muatan total yang membangkitkan medan magnet dan medan listrik bersifat lestari (*conserve*). Persamaan (36) dapat diuraikan menjadi bagian vektor dan bagian trivektor [2][7], yakni

$$\nabla \cdot F = J \tag{37}$$

dan

$$\nabla \wedge F = 0\,. \tag{38}$$

Dalam bentuk tensor kedua persamaan di atas dapat dituliskan sebagai [5]

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\mu \tag{39}$$

dan

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0\,. \tag{40}$$

Dua persamaan tensor terakhir ini merupakan rumusan yang kompak bagi keempat persamaan Maxwell yang sejauh ini dapat dicapai dengan aljabar tensor. Tampak bahwa penyajian persamaan Maxwell dalam bentuk tensor di atas sesuai dengan penyajian persamaan Maxwell dalam forma diferensial. Tetapi, aljabar geometris dapat mencapai sesuatu yang lebih dibanding forma diferensial, yakni memadukan keempat persamaan Maxwell dalam satu persamaan tunggal.

4.2. Potensial Vektor

Mengingat bahwa $\nabla \wedge F = 0$, definisikan medan vektor *A* sedemikian sehingga

$$F = \nabla \wedge A \tag{41}$$

Dapat ditunjukkan bahwa $\nabla \wedge F = \nabla \wedge \nabla \wedge A = 0$. Medan vektor *A* disebut sebagai potensial vektor. Medan vektor ini memenuhi sifat

$$\nabla \cdot \left(\nabla \wedge A\right) = \nabla^2 A - \nabla\left(\nabla \cdot A\right) = J. \tag{42}$$

Persamaan (42) mengakibatkan adanya kebebasan dalam menentukan vektor potensial *A*. Hal ini disebabkan jika pada vektor potensial *A* ditambahkan gradien medan skalar $\nabla\lambda$ maka medan vektor potensial baru $A' = A + \nabla\lambda$ akan membangkitkan kuat medan elektromagnetik yang tepat sama seperti *A*,

$$\nabla \wedge \left(A + \nabla\lambda\right) = \nabla \wedge A + \nabla \wedge \left(\nabla\lambda\right) = F. \tag{43}$$

Medan skalar λ dikenal sebagai fungsi tera lokal dan vektor potensial *A* dikatakan memenuhi transformasi tera (*gauge transformation*). Adanya kebebasan pemilihan vektor potensial tersebut dapat diusahakan pilihan dengan sifat fisis yang menguntungkan dan memenuhi suatu kaitan fisis yang cukup ringkas [8]. Jadi, dari vektor potensial sembarang *A* orang senantiasa dapat berpindah melalui transformasi tera yang sesuai ke vektor potensial *A'* lainnya untuk mana berlaku syarat Lorentz

$$\nabla \cdot A = 0. \tag{44}$$

Jika dipenuhi syarat Lorentz di atas maka diperoleh

$$F = \nabla A \tag{45}$$

Sehingga didapat persamaan gelombang untuk vektor potensial A, yakni

$$\nabla F = \nabla^2 A = J \tag{46}$$

Oleh karenanya solusi dari persamaan Maxwell diperoleh dengan menyelesaikan persamaan gelombang (46) tentu saja dengan memperhatikan syarat-syarat batas tertentu sesuai dengan keadaan sistem fisis yang ditinjau.

5. Kesimpulan

Telah ditunjukkan aplikasi aljabar geometris dalam teori elektrodinamika klasik. Dengan menggunakan aljabar geometris persamaan-persamaan Maxwell dapat dipadukan dalam satu persamaan kompak $\nabla F = J$. Perpaduan ini tidak menghilangkan informasi-informasi fisis dari persamaan Maxwell. Persamaan-persamaan Maxwell awal dapat diperoleh kembali dengan mengambil masing-masing derajat multivektor $\nabla F = J$. Solusi bagi persamaan Maxwell dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan gelombang $\nabla^2 A = J$ menurut syarat batas tertentu sesuai dengan keadaan sistem fisis yang ditinjau.

6. Daftar Pustaka

[1] A. Baiquni, *Al qur'an Ilmu Pengetahuan dan Teknologi*, PT Dana Bakti Wakaf, 1994.

[2] C. Doran dan A. Lasenby, *Geometric Algebra for Physicist,* Cambridge University Press, 2005.

[3] Hestenes, D., *Geometric Algebra and Geometric Calculus*, Departement of Physics and Astronimy, Arizona State University, 1998, hal 1-27.

[4] Hestenes, D., *Old Wine in New Bottle: a New Algebraic Framework for Computational Geometry*, Birkhaeser Boston, 2001, hal 16.

[5] Joko Purwanto, *Teori Tera Elektromagnetik dengan Aljabar Geometris*, *Skripsi*, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada Yogyakarta, 2007.

[6] Jackson, D.J, *Classical Electrodynamics 3th*, Willey, New York, 1999.

[7] Joko Purwanto, *Perpaduan Keempat Persamaan Maxwell Elektrodinamika Klasik dengan Aljabar Geometris*, Prosiding Seminar Quantum 2012, UAD, 2012.

[8] Muslim, *Monograf: Elektrodinamika Klasik via Relativitas Khusus*, FMIPA UGM, 1996.